ANALYSE III
Support de cours

Nihale El Boukhari
Faculté Polydisciplinaire de Khouribga

Filière SMIA - S2
Année universitaire : 2020 - 2021

Chapitre 1

Formules de Taylor et applications

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$.

1.1 Dérivation

1.1.1 Rappels

Définition 1.1.1. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $a \in I$.*

- *On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f en a.*
- *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x \in I$. Dans ce cas, la fonction*
$$f' : x \mapsto f'(x)$$
est appelée la fonction dérivée de f.

Exercice 1.1.2. *Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point a :*

1. $f : x \mapsto |x - 1| \qquad a = 1$
2. $f : x \mapsto \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases} \qquad a = 0$
3. $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases} \qquad a = 0$
4. $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases} \qquad a = 0$
   où $x \mapsto E(x)$ désigne la fonction partie entière.

Proposition 1.1.3. *f est dérivable en a si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ et un réel $l \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, et*

$$f(x) = f(a) + l(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \qquad \forall x \in I$$

Dans ce cas, l vérifie $l = f'(a)$.

Démonstration. $\Rightarrow$ | On suppose que f est dérivable en a. On pose

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, et $\quad f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)\varepsilon(x), \quad \forall x \in I.$
$\Leftarrow$ | Réciproquement, on suppose qu'il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \qquad \forall x \in I$$

Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l + \varepsilon(x)$$

D'où

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$$

Alors f est dérivable en a, et $f'(a) = l$. □

Proposition 1.1.4. *Toute fonction dérivable en a est continue en a.*

Démonstration. Soit $x \neq a$, alors

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] = f'(a) \times 0 = 0$$

D'où f est continue en a. □

Remarque 1.1.5. *La réciproque est fausse en général. Contre-exemple : $x \mapsto |x|$ en $a = 0$.*

Proposition 1.1.6. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et $a \in I$.*
Si f est g sont dérivables en a, alors $f+g$, αf, ($\alpha \in \mathbb{R}$), et fg sont dérivables en a et :

$$\begin{aligned} &(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \\ &(\alpha f)'(a) = \alpha \times f'(a) \\ &(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \end{aligned}$$

Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Démonstration. Voir le module Analyse I. □

Théorème 1.1.7. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions, telles que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, et si g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

Démonstration. Voir le module Analyse I. □

Théorème 1.1.8. *Soit $f : I \to f(I) \subset \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I.*
Alors la bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$

Démonstration. Voir le module Analyse I. □

Définition 1.1.9. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \operatorname{int}(I)$.*

– *On dit que f admet un* **maximum local** *en a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$ et*

$$\forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\quad f(x) \leq f(a)$$

– *On dit que f admet un* **minimum local** *en a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$ et*

$$\forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\quad f(x) \geq f(a)$$

– *On dit que f admet un* **extrémum local** *en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.*

Proposition 1.1.10. *Si f est dérivable en a, et si f admet un extrémum local en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Exercice. □

Remarque 1.1.11. *La réciproque est fausse en général. Contre-exemple : $f : x \mapsto x^3$ en $a = 0$.*

1.1.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 1.1.12 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que*

– *f est continue sur $[a,b]$*
– *f est dérivable sur $]a,b[$*
– *$f(a) = f(b)$*

Alors, $\exists c \in]a,b[: \quad f'(c) = 0$.

Démonstration. Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, alors $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que

$$f(c_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \qquad f(c_2) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

• **1er cas** $f(c_1) = f(c_2) = f(a) = f(b)$
Dans ce cas, f est constante sur $[a, b]$. D'où $\forall c \in]a, b[: \quad f'(c) = 0$.
• **2ème cas** $f(c_1) \neq f(a)$.
Alors $c_1 \neq a$ et $c_1 \neq b$. D'où $c_1 \in]a, b[$.
Or, $f(c_1) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$. Donc f admet un maximum local en c_1.
Par conséquent, $f'(c_1) = 0$.
• **3ème cas** $f(c_2) \neq f(a)$.
Alors $c_2 \in]a, b[$. Comme f admet un minimum local en c_2, alors $f'(c_2) = 0$. □

Remarque 1.1.13. *Le réel c n'est pas unique en général. Considérons, par exemple, la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f: & \left[0, \dfrac{1}{\pi}\right] & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Alors il existe une infinité de $c \in]0, \frac{1}{\pi}[$ vérifiant $f'(c) = 0$.

Théorème 1.1.14 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que*

- *f est continue sur $[a, b]$*
- *f est dérivable sur $]a, b[$*

Alors, $\exists c \in]a, b[: \quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Démonstration. On pose

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Alors φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$.
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ce qui donne $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

1.1.3 Dérivée et sens de variation

Théorème 1.1.15. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur* $\text{int}(I)$*. Alors*

i. f est croissante sur $I \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{int}(I)$
ii. f est décroissante sur $I \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \text{int}(I)$
iii. f est constante sur $I \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{int}(I)$

Démonstration. On va démontrer (i), (ii) et (iii) étant des résultats immédiats de (i).
$\Rightarrow |$ On suppose que f est croissante sur I.

Soit $x \in \text{int}(I)$, et soit $y \in I \setminus \{x\}$. Alors $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. D'où

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$$

$\Leftarrow |$ On suppose que $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{int}(I)$.
Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. I est un intervalle donc $]x, y[\subset \text{int}(I)$. Il s'ensuit que f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Comme $f'(c) \geq 0$ alors $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. D'où $f(x) \leq f(y)$.
Par conséquent, f est croissante sur I. $\square$

Proposition 1.1.16 (Fonctions strictement monotones)**.** *Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur* $\text{int}(I)$*. On suppose que f est monotone sur I. Alors f est strictemtnt monotone sur I si et seulement si l'ensemble $\{x \in \text{int}(I) \ : \ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle ouvert non-vide.*

Démonstration.
$\Rightarrow |$ Si l'ensemble $\{x \in \text{int}(I) \ : \ f'(x) = 0\}$ contient un intervalle ouvert non-vide J, alors la restriction de f sur J est constante, ce qui contredit le fait que f est strictement monotone.
$\Leftarrow |$ Réciproquement, on suppose que $\{x \in \text{int}(I) \ : \ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle ouvert non-vide.
Raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'est pas strictement monotone sur I. Alors il existe $x, y \in I$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y)$. Comme f est monotone sur $[x, y]$ alors $f(c) = f(x) = f(y), \quad \forall c \in]x, y[$. Par suite $f'(c) = 0, \quad \forall c \in]x, y[\neq \emptyset$. Il s'ensuit que $]x, y[\subset \{x \in \text{int}(I) \ : \ f'(x) = 0\}$. Ce qui est absurde. Alors f est strictement monotone sur I. $\square$

1.2 Fonctions de classe C^n

1.2.1 Dérivées successives

Définition 1.2.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On pose $f^{(0)} = f$. Si f est dérivable sur I, on note $f^{(1)} = f'$. Ainsi, on définit par récurrence la dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, comme étant la dérivée de $f^{(n-1)}$.*

Exemple 1.2.2. *La dérivée n-ième de* $\sin$ *est donnée par*

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & si\ n = 4k \\ \cos(x) & si\ n = 4k+1 \\ -\sin(x) & si\ n = 4k+2 \\ -\cos(x) & si\ n = 4k+3 \end{cases}$$

On obtient

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 1.2.3. *On définit sur* $\mathbb{R}$ *la fonction* $f : x \mapsto x^n$ *(*$n \in \mathbb{N}^*$*). Montrer que*

$$f^{(p)}(x) = \begin{cases} 0 & si\ p > n \\ A_n^p x^{n-p} & si\ p \leq n \end{cases}$$

où $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Remarque 1.2.4. *Ne pas confondre* $f^{(n)}$*, la dérivée* n*-ième de* f*, et* $f^n = \underbrace{f \times \cdots \times f}_{n\ fois}$.

Proposition 1.2.5. *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions* n *fois dérivables sur* I*. Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Alors les fonctions* $f + g$ *et* αf *sont* n *fois dérivables sur* I *et*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \qquad (\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$$

Démonstration. Exercice (Raisonner par récurrence). □

Proposition 1.2.6 (Formule de Leibniz)**.** *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions* n *fois dérivables sur* I*. Alors la fonction* fg *est* n *fois dérivable sur* I *et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \tag{1.1}$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence.

• Pour $n = 1$. Si f et g sont dérivables alors fg est dérivable et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{1} C_n^k f^{(k)} g^{(1-k)} &= C_1^0 f^{(0)} g^{(1)} + C_1^1 f^{(1)} g^{(0)} \\ &= fg' + f'g \\ &= (fg)' \end{aligned}$$

• Supposons que (1.1) est vérifiée pour $n \geq 1$ fixé. Soient f et g deux fonctions $(n+1)$ fois dérivables. Alors f' et g' sont n fois dérivables, d'où $(fg)' = f'g + fg'$ est n fois dérivable. Il s'ensuit que fg est $(n+1)$ fois dérivable. De plus, on a

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right]' \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(k+1)} g^{(n-k)}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_n^n f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= C_{n+1}^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} [C_n^{k-1} + C_n^k] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)}
\end{aligned}
$$

Comme $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, alors

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= C_{n+1}^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}
$$

D'où la récurrence. □

1.2.2 Fonctions de classe C^n

Définition 1.2.7.
- *On dit que f est de classe C^0 sur I si f est continue sur I.*
- *On dit que f est de classe C^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sur I si f est n fois dérivable sur I et si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I.*
- *On dit que f est de classe C^∞ sur I si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemples 1.2.8.
1. *La fonction $f : x \mapsto x|x|$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction*
$$
f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}
$$
est de classe C^0 sur $[0, +\infty[$. En effet, f est dérivable sur $[0, +\infty[$, mais sa dérivée
$$
f' : x \mapsto \begin{cases} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}
$$
n'est pas continue en 0 (f' n'a pas de limite en 0).
3. *Les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$ sont de classe C^∞ sur leurs domaines de définition respectifs.*

Notation
L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I est noté $C^n(I)$ (ou bien $C^n(I, \mathbb{R})$).
Si $0 \leq n \leq m$, alors $C^\infty(I) \subset C^m(I) \subset C^n(I) \subset C^0(I)$.

Théorème 1.2.9. *Si f et g sont de classe C^n sur I, alors $f + g$, fg, et αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) sont de classe C^n sur I.*

Démonstration. Récurrence. □

Proposition 1.2.10. *Soit $f \in C^n(I)$ ($n \in \mathbb{N}$ ou $n = +\infty$). Si f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est de classe C^n sur I.*

Démonstration. On raisonne par récurrence.

• Pour $n = 1$. Si f est de classe C^1 sur I, et si f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I. De plus, $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$, alors la continuité de f' implique la continuité de $\left(\frac{1}{f}\right)'$. Par suite, $\frac{1}{f}$ est de classe C^1 sur I.

• Pour $n \geq 1$ fixé, on suppose que si f ne s'annule pas sur I on a

$$f \in C^n(I) \Rightarrow \frac{1}{f} \in C^n(I) \qquad \text{(HR)}$$

Montrons que

$$f \in C^{n+1}(I) \Rightarrow \frac{1}{f} \in C^{n+1}(I)$$

Pour ce faire, soit $f \in C^{n+1}(I)$ une fonction qui ne s'annule pas sur I. Alors

- $f^2 = f \times f \in C^n(I)$;
- f^2 ne s'annule pas sur I.

En appliquant (HR) à f^2, on a $\frac{1}{f^2} \in C^n(I)$.

De plus, on a $f' \in C^n(I)$. Il s'ensuit que $f' \times \left(\frac{1}{f^2}\right) \in C^n(I)$. Alors $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \in C^n(I)$.

Ce qui donne $\frac{1}{f} \in C^{n+1}(I)$. D'où la récurrence. □

Proposition 1.2.11 (Composition des fonctions de classe C^n)**.** *Soient $f \in C^n(I)$ et $g \in C^n(J)$ telles que $f(I) \subset J$ ($n \in \mathbb{N}$ ou $n = +\infty$). Alors $g \circ f \in C^n(I)$.*

Démonstration. Exercice (Raisonner par récurrence). □

1.3 Formules de Taylor

1.3.1 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 1.3.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($a \neq b$) une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, et $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{\textit{reste de Lagrange}} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Démonstration. On pose

$$\varphi(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f^{(2)}(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + K\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} - f(b)$$

Alors $\varphi(b) = 0$. On choisit K de sorte que $\varphi(a) = 0$, c'est-à-dire

$$K = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left[f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right]$$

Comme

- φ est continue sur $[a, b]$
- φ est dérivable sur $]a, b[$
- $\varphi(a) = \varphi(b)$

alors, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\begin{aligned}\varphi'(c) = \;& f'(c) \\ & -f'(c) + (b-c)f^{(2)}(c) \\ & -(b-c)f^{(2)}(c) + \frac{(b-c)^2}{2!}f^{(3)}(c) \\ & -\frac{(b-c)^2}{2!}f^{(3)}(c) + \frac{(b-c)^3}{3!}f^{(4)}(c) \\ & - \cdots + \ldots \\ & -\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c) + \frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) \\ & -K\frac{(b-c)^n}{n!}\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\varphi'(c) = \frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) - K\frac{(b-c)^n}{n!}$$

Or, $\varphi'(c) = 0$, d'où

$$K = f^{(n+1)}(c)$$

Par conséquent

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left[f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right]$$

Ce qui donne la formule (1.2). □

Remarques 1.3.2.

- *La formule* (1.2) *est appelée la formule de* **Taylor-Lagrange** *à l'ordre* n.
- *Si* $n = 0$*, la formule de Taylor-Lagrange n'est autre que le théorème des accroissements finis.*
- *Si* $a = 0$*, et si on note* $x = b$*, on obtient la formule de* **Mac-Laurin** *:*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \tag{1.3}$$

Exemple 1.3.3. *Soit $x \neq 0$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, il existe $c \in]0, x[$ tel que*

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos(0) + x\cos'(0) + \frac{x^2}{2!}\cos^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\cos^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}\cos^{(4)}(c) \\
&= \cos(0) - x\sin(0) - \frac{x^2}{2!}\cos(0) + \frac{x^3}{3!}\sin(0) + \frac{x^4}{4!}\cos(c) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\cos(c)
\end{aligned}$$

Exercice 1.3.4. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$.

Exercice 1.3.5. *Soit $x > 0$. Montrer que*

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Exercice 1.3.6. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Montrer que, pour tout $x > 0$, on a*

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

2. *En déduire que*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

3. *Quelle est la limite de la suite* $\left(S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\right)_{n\geq 1}$ *, pour $x > 0$ fixé ?*

Proposition 1.3.7 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. On suppose que*

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in]a, b[\qquad |f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{1.4}$$

Démonstration. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n. □

Exemple 1.3.8. *Soit $x \neq 0$, et considérons la fonction $\cos : [0, x] \to \mathbb{R}$. on sait que $\cos$ est de classe C^∞ sur $[0, x]$, et que*

$$|\cos(t)| = |\cos^{(4)}(t)| \leq 1 \qquad \forall t \in [0, x]$$

Alors

$$\left|\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{x^4}{4!}$$

1.3.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.3.9 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n $(n \geq 0)$ sur l'intervalle I, et soit $a \in I$. Alors, il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\varepsilon(x) \qquad \forall x \in I \tag{1.5}$$

avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Démonstration.
Cas où $n = 0$.
Pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + \varepsilon(x) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. Alors $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ (car f est continue sur I).
Cas où $n \geq 1$.
La formule (1.5) est vérifiée si $x = a$, pour toute fonction ε vérifiant $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
Soit $x \in I \setminus \{a\}$. On applique à f la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $(n-1)$, donc il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c_x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} [f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)] \end{aligned}$$

On pose $\varepsilon(x) = f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)$. Comme $f^{(n)}$ est continue sur I, et $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$, alors $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a) = 0$. □

Exercice 1.3.10. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, et $a \in \mathbb{R}$.*
En appliquant à f la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a)$$

En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(x) - 2}{x^2}$.

Exercice 1.3.11. *En utilisant la formule de Taylor-Young, calculer*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$$

1.3.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 1.3.12 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^{n+1} *sur* $[a,b]$*. Alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \tag{1.6}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence.
• Pour $n = 0$ on a

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t$$

pour toute fonction f de classe C^1 sur $[a,b]$.
• On suppose que la formule (1.6) est vérifiée pour $n \geq 0$ donné. Montrons que (1.6) est vérifiée pour $n+1$.
Soit f une fonction de classe C^{n+2} sur $[a,b]$. Alors f est de classe C^{n+1}, d'où, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

En effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\times(n!)} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)\times(n!)} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où la récurrence. □

Exemple 1.3.13. *Soit* $x \neq 0$*. La fonction* $x \mapsto e^x$ *est de classe* C^{n+1} *sur* $[0,x]$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Alors*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\ \mathrm{d}t$$

Exercice 1.3.14. *Soit* $x \geq 0$*.*

1. *Montrer que, pour tout* $k \geq 1$*,*

$$\ln^{(k)}(x+1) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(x+1)^k}$$

2. *En déduire que*

$$\left| \ln(x+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$

3. *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1.4 Fonctions convexes

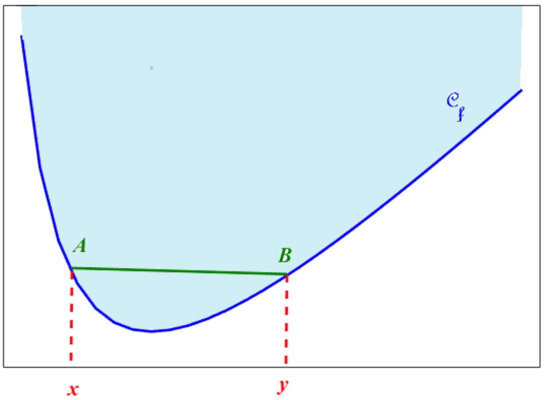
Définition 1.4.1. *On dit que la fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est convexe si*

$$\forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in [0,1] \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1.7}$$

On dit qu'une fonction f *est concave si* $-f$ *est convexe.*

Interprétation géométrique

Si f est convexe sur I alors, pour tous $x, y \in I$, le segment $[A(x, f(x)); B(y, f(y))]$ se situe au dessus de la courbe représentative de f.



En plus, l'épigraphe de f, défini par

$$\text{epi}(f) = \{ M(x,y) \ : \ x \in I, \ y \geq f(x) \ \}$$

est convexe.

Exercice 1.4.2. *Les fonctions suivantes sont-elles convexes ?*

1. $f : x \mapsto x^2$ *sur* $\mathbb{R}$
2. $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ *sur* $]0, +\infty[$

Exercice 1.4.3 (Inégalité de Jensen). *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe. Etant donné* $n \geq 2$*, soient* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ *et* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ *tels que*

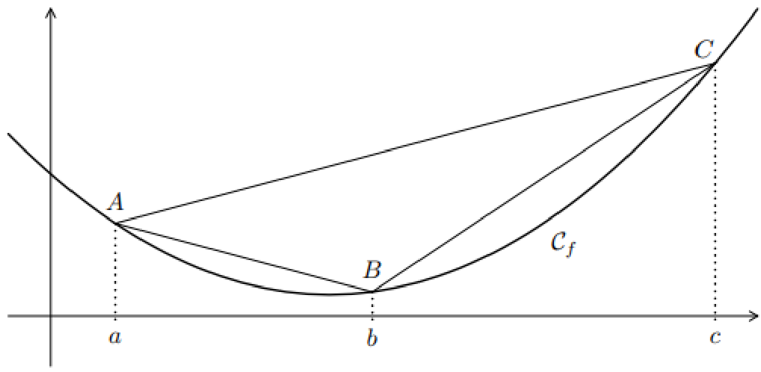
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$$

Montrer que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Lemme 1.4.4 (Lemme des trois pentes)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $a, b, c \in I$. Si $a < b < c$ alors*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \tag{1.8}$$



Démonstration. Soient $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$. Il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $b = \lambda a + (1-\lambda)c$ (Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\lambda \mapsto \lambda a + (1-\lambda)c$). Comme f est convexe, alors

$$f(b) = f(\lambda a + (1-\lambda)c) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$

De plus, on a

$$b - a = (1-\lambda)(c-a) \qquad c - b = \lambda(c-a)$$

Par conséquent

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{\lambda f(a) + (1-\lambda)f(c) - f(a)}{(1-\lambda)(c-a)} = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \geq \frac{f(c) - [\lambda f(a) + (1-\lambda)f(c)]}{\lambda(c-a)} = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

□

Corollaire 1.4.5. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et $a \in I$.*
Alors la fonction taux d'accroissement en a, donnée par

$$\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme des trois pentes aux points a, x, et y pour montrer que $x < y$ entraîne $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$. □

Exercice 1.4.6. *Soit* $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction convexe, croissante, et non constante.*
Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Théorème 1.4.7. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* I.
Alors f *est convexe sur* I *si et seulement si* f' *est croissante sur* I.

Démonstration. $\Rightarrow$ | On suppose que f est convexe sur I. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Soit $a \in]x, y[$. D'après le lemme des trois pentes, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{a\to x} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \lim_{a\to x} \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

D'où

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

De même, on obtient

$$\lim_{a\to y} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \lim_{a\to y} \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Ce qui donne

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

Par conséquent

$$f'(x) \leq f'(y)$$

Ce qui signifie que f' est croissante sur I.
$\Leftarrow$ | Réciproquement, on suppose que f' est croissante sur I. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$.
Si $x = y$ ou $\lambda \in \{0, 1\}$ alors

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Si $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $x < y$. Alors

$$x < \lambda x + (1 - \lambda)y < y$$

En appliquant le théorème des accroissements finis, il existe $c_1 \in]x, \lambda x + (1 - \lambda)y[$ et $c_2 \in]\lambda x + (1 - \lambda)y, y[$ tels que

$$f'(c_1) = \frac{f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(x)}{\lambda x + (1 - \lambda)y - x} = \frac{f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(x)}{(1 - \lambda)(y - x)}$$

$$f'(c_2) = \frac{f(y)f(\lambda x + (1 - \lambda)y)}{y - [\lambda x + (1 - \lambda)y]} = \frac{f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)}{\lambda(y - x)}$$

Comme f' est croissante sur I et $c_1 < c_2$, alors $f'(c_1) \leq f'(c_2)$. D'où

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \leq \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)}$$

Ce qui donne

$$\lambda[f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)] \leq (1-\lambda)[f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)]$$

Il s'ensuit que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Alors f est convexe sur I. $\square$

Corollaire 1.4.8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I.*
Alors f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.

Démonstration. D'après le théorème 1.4.7, f est convexe si et seulement si f' est croissante. Or, f' est dérivable sur I, donc f' est croissante sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I. D'où le résultat. $\square$

Exemple 1.4.9. *La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave. En effet, $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe, car* $-\ln''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0, \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

Théorème 1.4.10 (Inégalité de la tangente)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur I. Alors*

$$\forall a \in I, \quad \forall x \in I, \qquad f(x) \geq f(a) + (x-a) f'(a) \tag{1.9}$$

Autrement dit, le graphe de f est situé au dessus de toutes ses tangentes.

Démonstration.
• 1er cas : $x < a$. Soit $y \in]x, a[$. D'après le lemme des trois pentes, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

En passant à la limite lorsque $y \to a$, on obtient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'(a)$$

Or, $x - a < 0$, alors l'inégalité devient

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

• 2ème cas : $x > a$. Soit $y \in]a, x[$. D'après le lemme des trois pentes, on a

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En passant à la limite lorsque $y \to a$, on obtient

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Or, $x - a > 0$, alors l'inégalité devient

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

Finalement, l'inégalité (1.9) est vérifiée lorsque $x = a$. $\square$

Exercice 1.4.11. *Soit f une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.*
2. *Donner un exemple d'une fonction convexe et majorée sur $]0, +\infty[$, qui ne soit pas constante.*

Exercice 1.4.12. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.*

1. *Montrer que f est dérivable à droite et à gauche sur I, et que*

$$\forall x < a < y \in I, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

2. *En déduire que f est continue sur I.*